第 3 节 椭圆中的设点设线方法（★★★☆）

内容提要

有时椭圆小题中的条件不易用几何方式翻译，我们就需要设出点或线，用坐标运算来翻译.

1．若点 P 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上运动，由此而产生的求最值（求范围）问题，设动点 P 的坐标并用它表示求最值的目标量是常用解法之一，动点 P 的设法主要有两种：

①设 $P(x_0,y_0)$，用该坐标表示的目标量往往有 x_0 和 y_0 两个变量，可利用 P 在椭圆上（即 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$）来消元化单变量函数分析最值（范围）.

②利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 进行三角换元，可令 $\begin{cases}\frac{x}{a}=\cos\theta\\ \frac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$，于是可设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，将求最值的目标量表示成关于 θ 的三角函数，再分析最值（范围）.

2．设直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，由此产生的诸多问题中，需要将直线 l 与椭圆 C 的方程联立，但联立后我们往往不去解方程组，求交点 A，B 的坐标，而是消去 y（或 x）整理得出关于 x（或 y）的一元二次方程，结合韦达定理来计算一些目标量，如数量积、弦长、面积等.

典型例题

类型Ⅰ：设点求最值方法

【例 1】已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+x^2=1(a>1)$ 的离心率 $e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，P 为椭圆上的一个动点，$B(-1,0)$，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）2　　（C）$\frac{5}{2}$　　（D）3

解法 1：由题意，椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，解得：$a=\sqrt{5}$，椭圆的方程为 $\frac{y^2}{5}+x^2=1$，

$|PB|$ 可用两点间的距离公式来算，于是设 P 的坐标，设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PB|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}$ ①，

有 x_0，y_0 两个变量，可结合椭圆方程消元，y_0 只有平方项，所以消 y_0，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{y_0^2}{5}+x_0^2=1$，故 $y_0^2=5-5x_0^2$，

代入①整理得：$|PB|=\sqrt{-4x_0^2+2x_0+6}=\sqrt{-4(x_0-\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}$，其中 $-1\le x_0\le 1$，

所以当 $x_0=\frac{1}{4}$ 时，$|PB|$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$.

解法 2：求 a 的过程同解法 1，接下来也可将点 P 的坐标设为三角的形式，

设 $P(\cos\theta,\sqrt{5}\sin\theta)$，则 $|PB|=\sqrt{(\cos\theta+1)^2+5\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta+2\cos\theta+1+5\sin^2\theta}$ ①，

要求式①的最大值，可用 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ 化同名，

$|PB|=\sqrt{\cos^2\theta+2\cos\theta+1+5-5\cos^2\theta}=\sqrt{-4\cos^2\theta+2\cos\theta+6}=\sqrt{-4(\cos\theta-\frac{1}{4})^2+\frac{25}{4}}$,

所以当 $\cos\theta=\frac{1}{4}$ 时，$|PB|$ 取得最大值 $\frac{5}{2}$.

答案：C

【反思】椭圆上动点到定点的距离最值问题，常用两种做法：①设动点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，利用椭圆方程消去目标式中只含平方项的变量，再求最值；②将动点 P 设为三角形式，用函数的方法求最值.

【变式】求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的动点 P 到其中心 O 的距离的取值范围.

解：（P 在椭圆上运动，$|OP|$ 可由坐标计算，故设坐标分析）

设 $P(x_0,y_0)$，则 $|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ ①，（有 x_0，y_0 两个变量，可利用椭圆方程消元）

由 P 在椭圆上可得 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2$，

代入①得：$|OP|=\sqrt{x_0^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_0^2+b^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2+b^2}$ ②，

因为 $-a\le x_0\le a$，所以 $0\le x_0^2\le a^2$，代入②得：$b\le|OP|\le\sqrt{c^2+b^2}=a$.

【例 2】已知 F_1，F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆 E 上任意一点，则 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}$ 的取值范围是______.

解析：设点 P 的坐标，即可表示 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}$，设 $P(x,y)$，由题意，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

所以 $\overrightarrow{F_1P}=(x+1,y)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x-1,y)$，故 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=(x+1)(x-1)+y^2=x^2+y^2-1$ ①，

有 x，y 两个变量，且都只含平方项，可利用椭圆方程来消元，消谁都行，

因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故 $y^2=3-\frac{3}{4}x^2$，代入①整理得：$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=\frac{1}{4}x^2+2$，

因为 $-2\le x\le 2$，所以 $0\le x^2\le 4$，故 $2\le\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}\le 3$.

答案：$[2,3]$

【反思】本题也可设三角形式的坐标，请自行尝试.

【例 3】已知点 P 在直线 $l:x+y+7=0$ 上，点 Q 在椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值是______.

解法 1：如图 1，若固定 Q，则无论点 Q 在何处，总有当 $PQ\perp l$ 时，$|PQ|$ 最小，故只需求点 Q 到直线 l 的距离的最小值，点 Q 在椭圆 C 上运动，可将其坐标设为三角形式，

设 $Q(4\cos\theta,3\sin\theta)$，则点 Q 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\theta+3\sin\theta+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5\sin(\theta+\varphi)+7|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sin(\theta+\varphi)+7}{\sqrt{2}}$，

所以当$\sin(\theta+\varphi)=-1$时，d取得最小值$\sqrt{2}$，故$|PQ|_{\min}=\sqrt{2}$.

解法 2：也可从图形来看最值在何处取，如图 2，将 l 上移至恰好与椭圆 C 相切的位置，则该切点 Q 到直线 l 的距离即为$|PQ|$的最小值，可先求出该切线的方程，用平行线间的距离公式算答案，

设图 2 中$l':x+y+m=0$，联立$\begin{cases}x+y+m=0\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$消去 y 整理得：$25x^2+32mx+16m^2-144=0$，

因为l'与椭圆 C 相切，所以判别式$\Delta=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)=0$，解得：$m=\pm5$，

由图可知l'在 y 轴上的截距$-m<0$，所以$m>0$，从而$m=5$，故$|PQ|_{\min}=\dfrac{|7-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$

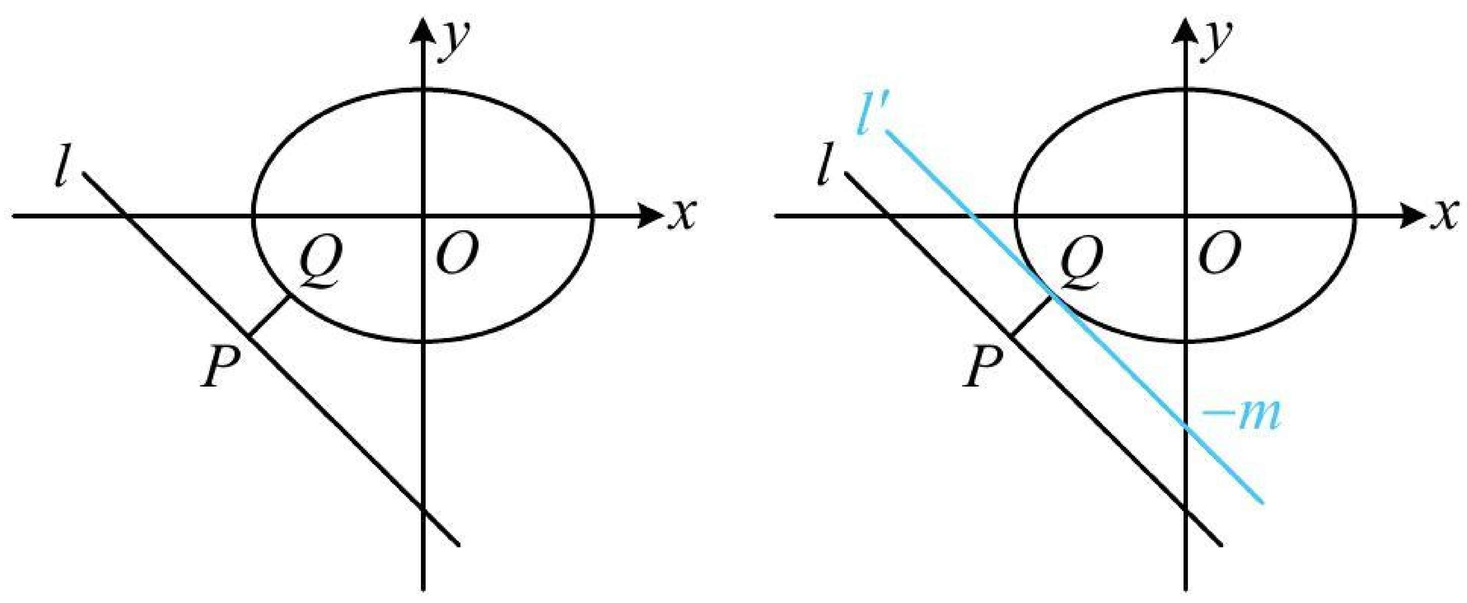


图1　　图2

【反思】①和例 1、例 2 不同，本题若将 Q 的坐标设为(x,y)，则$d=\dfrac{|x+y+7|}{\sqrt{2}}$，$x$ 和 y 都有一次项，利用椭圆方程消元不易，故而舍弃这种设法；②注意：有的题目条件较为隐蔽，要学会翻译，例如本题不给 l 的方程，换成给出 P 的坐标为$(m,-m-7)$，也要发现点 P 在直线$l:x+y+7=0$上.

【总结】从类型 I 的这些题可以看出，涉及与椭圆上的动点有关的量（如数量积、距离等）的最值，都可设出动点坐标求解，具体设为(x_0,y_0)，还是三角形式的坐标，因题而异.

类型 II：设点、设线翻译条件

【例 4】椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为 A，F 是 C 的一个焦点，点 B 在 C 上，若$3\overrightarrow{AF}+5\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{3}{5}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析：用几何方法翻译$3\overrightarrow{AF}+5\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$不易，故考虑设坐标，用坐标来翻译，

由题意，$A(0,b)$，不妨设 F 为右焦点，则$F(c,0)$，设$B(x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{AF}=(c,-b)$，$\overrightarrow{BF}=(c-x_0,-y_0)$，

因为$3\overrightarrow{AF}+5\overrightarrow{BF}=\mathbf{0}$，所以$\begin{cases}3c+5(c-x_0)=0\\ -3b+5(-y_0)=0\end{cases}$，故$x_0=\dfrac{8c}{5}$，$y_0=-\dfrac{3b}{5}$，

代入椭圆方程得：$\dfrac{64c^2}{25a^2}+\dfrac{9b^2}{25b^2}=1$，整理得离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

答案：A

【例 5】已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 2，右顶点为 A，过原点且与 x 轴不重合的直线交 C 于 M，N 两点，线段 AM 的中点为 B，若直线 BN 经过 C 的右焦点，则椭圆 C 的方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{5}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{32}=1$

答案：C

解法 1：由题意，椭圆的焦距$2c=2$，所以$c=1$，故$a^2-b^2=1$ ①，

如图，接下来若设 M 的坐标，则 N，B 也能用 M 的坐标表示，

设$M(x_0,y_0)(y_0\ne 0)$，则$N(-x_0,-y_0)$，由题意，$A(a,0)$，右焦点$F(1,0)$，所以$B(\dfrac{a+x_0}{2},\dfrac{y_0}{2})$，

直线 BN 过右焦点可看成 B，F，N 三点共线，不妨考虑斜率存在的情形，用斜率相等来翻译，

由题意，B，F，N 三点共线，所以$k_{BF}=k_{NF}$，故$\dfrac{\frac{y_0}{2}}{\frac{a+x_0}{2}-1}=\dfrac{y_0}{x_0+1}$，约去 y_0 可解得：$a=3$，

代入①得：$b^2=8$，所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

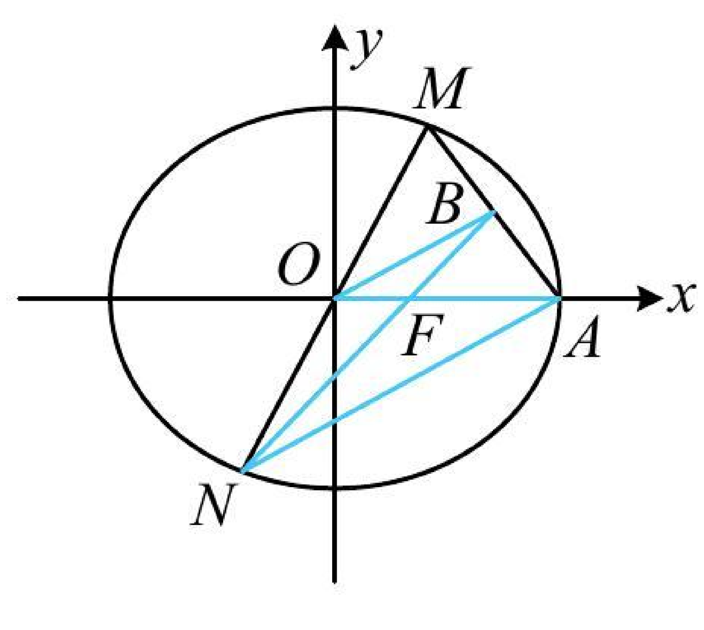
解法 2：记右焦点为 F，椭圆的焦距$2c=2$，所以$c=1$，故$|OF|=1$，且$a^2-b^2=1$ ①，

涉及中点，也可考虑构造中位线分析，如图，连接 OB，由对称性，O 为 MN 中点，

又 B 为 MA 中点，所以$|OB|=\dfrac{1}{2}|AN|$，且 $OB\,//\,AN$，平行可产生相似三角形，进而分析相似比，

所以$\Delta OBF\backsim\Delta ANF$，从而$\dfrac{|OF|}{|AF|}=\dfrac{|OB|}{|AN|}=\dfrac{1}{2}$，故$|AF|=2|OF|=2$，所以$|OA|=3$，即$a=3$，

代入①得：$b^2=8$，所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.



【反思】①本题的条件既可用几何语言翻译（解法 2），也可用坐标方式翻译（解法 1），但对于某些几何语言不好翻译的问题，我们一般就只能尝试设点、设线，用坐标翻译了（如下题）；②A，B，C 三点共线按坐标翻译一般用$k_{AB}=k_{AC}$.

【例 6】过椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，若线段 AB 的中垂线与 x 轴，y 轴各有唯一公共点 M，N，则$|MF|$的取值范围是_____.

解析： 用几何思路不易求$|MF|$，但若求出 M 的坐标，$|MF|$就知道了，故先求 AB 中垂线的方程，可设直线 l 的方程，与椭圆联立，结合韦达定理来求，直线 l 过 x 轴上的定点，常设横截式方程，

由题意，$F(-1,0)$，直线 l 不与坐标轴垂直，可设其方程为 $x=my-1(m\neq 0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$消去 x 整理得：$(m^2+2)y^2-2my-1=0$，判别式$\Delta=4m^2-4(m^2+2)\times(-1)=8(m^2+1)>0$，

由韦达定理，$y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+2}$，求 AB 中垂线要用中点坐标，还得算 x_1+x_2，可用 A，B 在 l 上来算，

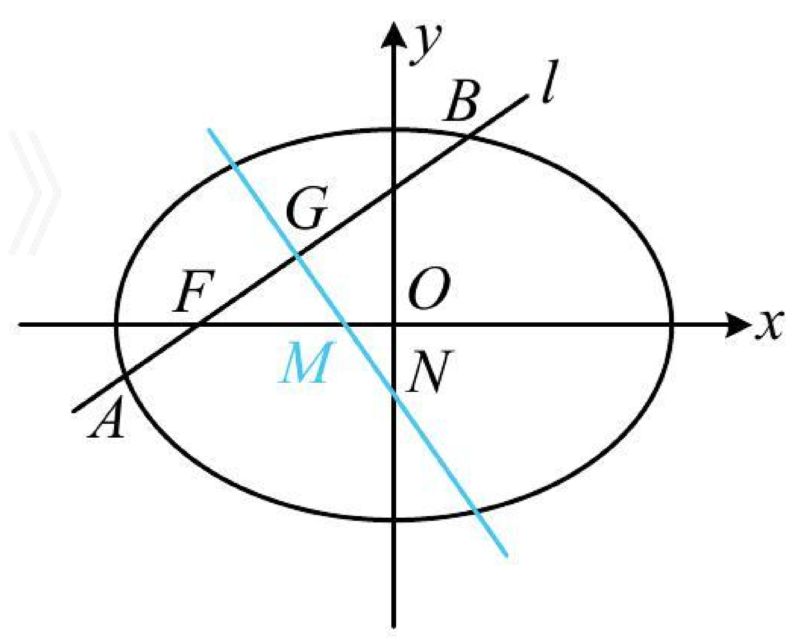
$x_1+x_2=my_1-1+my_2-1=m(y_1+y_2)-2=\dfrac{2m^2}{m^2+2}-2=-\dfrac{4}{m^2+2}$，所以 AB 中点为 $G(-\dfrac{2}{m^2+2},\dfrac{m}{m^2+2})$，

故 AB 的中垂线方程为 $y-\dfrac{m}{m^2+2}=-m(x+\dfrac{2}{m^2+2})$，整理得：$y=-mx-\dfrac{m}{m^2+2}$，

令 $y=0$ 可得：$x=-\dfrac{1}{m^2+2}$，所以 $M(-\dfrac{1}{m^2+2},0)$，故$|MF|=\left|-\dfrac{1}{m^2+2}-(-1)\right|=\left|1-\dfrac{1}{m^2+2}\right|$，

因为 $m\neq 0$，所以 $m^2+2>2$，从而 $0<\dfrac{1}{m^2+2}<\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{1}{2}<1-\dfrac{1}{m^2+2}<1$，所以 $|MF|\in(\dfrac{1}{2},1)$.

答案： $(\dfrac{1}{2},1)$



【反思】 ①涉及直线与椭圆交于 A，B 两点，常设直线方程和交点坐标，把直线与椭圆联立消去 x 或 y，得到一个一元二次方程，但很多时候我们并不去解此方程，而是结合韦达定理来计算有关的量，这种设而不求思想的应用非常广泛；②当直线过 y 轴上的定点 $(0,t)$ 时，常设斜截式方程 $y=kx+t$，但需注意考虑斜率不存在的情况；过 x 轴上的定点 $(t,0)$ 时，常设横截式方程 $x=my+t$，但它不能表示垂直于 y 轴的直线.

强化训练

1.（2023·海南琼海模拟·★★）设 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 A 为椭圆的上顶点，点 B 在椭圆上且满足 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

2.（★★）已知 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一点，F_1，F_2 是 C 的两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}>0$，则 y_0 的取值范围是（　　）

（A）$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　（B）$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　（C）$(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$　（D）$(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

3.（2021·全国乙卷·★★）设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，P 在 C 上，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

（A）$\frac{5}{2}$　（B）$\sqrt{6}$　（C）$\sqrt{5}$　（D）2

4.（2010·福建卷·★★★）若点 O 和 F 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点，点 P 为椭圆上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为（　　）

（A）2　（B）3　（C）6　（D）8

5．（★★★）已知圆 $C_1: x^2+y^2=b^2$ 和椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $y=kx(k\in\mathbf{R})$ 与 C_1 的一个交点为 A，与 C_2 的一个交点为 B，若 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的取值范围是 $(1,2]$，则椭圆 C_2 的离心率为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（D）$\frac{3}{4}$

6．（★★★）点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上运动，则当点 P 到直线 $l: x+y-4=0$ 的距离最小时，点 P 的坐标为_____.

7．（2022•上海模拟•★★★★）已知定点 $A(a,0)(a>0)$ 到椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点的距离的最小值为 1，则 a 的值为_____.

8．（2022•河南模拟•★★★★）已知椭圆 $C: \frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ 的上、下顶点分别为 A 和 B，点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 在椭圆 C 上，若点 $Q(x_1,y_1)$ 满足 $AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，则 $\frac{x_1}{x_0}=$（　　）

（A）$-\frac{1}{3}$　（B）$-\frac{1}{2}$　（C）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$-\frac{2}{3}$